

Machten, exponenten en logaritmen

Macht, exponent en grondtal

Exponenten en logaritmen hebben alles met machtsverheffen te maken. Een macht als 3^4 is niets anders dan de herhaalde vermenigvuldiging $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. In de *macht* 3^4 is 4 de *exponent* van deze macht bij het *grondtal* 3. In deze paragraaf herhalen we de definities voor het geval de exponent van een macht niet een positief natuurlijk getal is. Vervolgens kunnen we dan op twee manieren functies definiëren: is de exponent vast, dan krijgen we de zogeheten machtsfuncties: $x \rightarrow x^a$; is het grondtal vast, dan krijgen we de zogeheten exponentiële functies: $x \rightarrow a^x$. Door van deze laatste functies de inverse te nemen, krijgen we de logaritmische functies: $x \rightarrow {}^a\log x$.

1 Machten en machtsfuncties

Machtsverheffen

We beginnen onze beschouwingen met te herhalen wat we bedoelen met *machtsverheffen* als herhaald vermenigvuldigen.

Voor elke $x \in \mathbb{R}$ en elk positief natuurlijk getal n geldt:

$$x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \quad (n \text{ factoren})$$

Stap 1: exponent 0

Vervolgens leggen we vast wat we onder een macht met exponent 0 verstaan.

Voor $x \in \mathbb{R}$ geldt: $x^0 = 1$.

Merk op dat door deze definitie 0^0 gelijk is aan 1. U moet daar niet teveel achter zoeken.

Stap 2: negatieve gehele exponenten

Hierna volgt de definitie van een macht met een negatieve gehele exponent.

Voor $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ en k is een negatief geheel getal geldt: $x^k = 1/x^{-k}$.

De reden voor de beperking $x \neq 0$ is dat er niet door 0 gedeeld mag worden.

Stap 3: rationale exponenten

Nu herhalen we de definitie van een macht met een gebroken exponent. Eerst nemen we exponenten van de vorm $1/n$, $n = 1, 2, \dots$

Voor $x > 0$ en n is een positief natuurlijk getal geldt: $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

Wellicht ten overvloede roepen we in herinnering dat de n -de wortel uit x ($x > 0$) gedefinieerd is als de inverse bewerking van verheffen tot de n -de macht. Zo geldt $\sqrt[5]{32} = 2$, want $2^5 = 32$.

En de definitie van een macht met een willekeurige gebroken exponent is als volgt.

Voor $x > 0$ en $m/n \in \mathbb{Q}$ met $n > 0$ geldt: $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.

Merk op dat in deze definitie het geval $m < 0$ is meegenomen. Zo geldt bijvoorbeeld:

$$2^{-5/3} = \sqrt[3]{2^{-5}} = \sqrt[3]{1/2^5} = 1/\sqrt[3]{2^5} = 1/2^{5/3}$$

Beperken tot
positieve
grondtallen

De reden dat we ons bij machten waarvan de exponent geen geheel getal is, tot positieve grondtallen beperken, is de volgende. Stel, we zouden op de volgende wijze $(-2)^{1/3}$ berekenen:

$$(-2)^{1/3} = (-2)^{2/6} = ((-2)^2)^{1/6} = 4^{1/6} = (2^2)^{1/6} = 2^{2/6} = 2^{1/3}$$

Nu geldt echter ook dat $(-2)^{1/3} = -2^{1/3}$, want $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$. Om dit soort ongerijmdheden te vermijden, sluiten we negatieve grondtallen bij niet-gehele exponenten uit. Het grondtal 0 sluiten we uit om te voorkomen dat er bij een negatieve exponent door 0 gedeeld wordt.

Stap 4: reële
exponenten

Op machten met irrationale (dus reële, maar niet-rationale) exponenten gaan we op deze plaats niet al te diep in. We volstaan met op te merken dat elk irrationaal getal p willekeurig dicht door rationale getallen q te benaderen is. De macht x^p benaderen we nu met de macht x^q , en de definitie hiervan is in stap 3 gegeven.

Rekenregels voor
machten

De volgende vier regels gelden voor $x > 0$, $y > 0$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

Regel 1

$$(xy)^a = x^a y^a$$

Regel 2

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Regel 3

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Regel 4

$$x^a / x^b = x^{a-b}$$

De vierde regel volgt overigens uit de tweede regel via de eigenschap dat delen door een getal $y \neq 0$ hetzelfde is als vermenigvuldigen met $1/y$.

OPGAVE 1

Schrijf als wortel en vereenvoudig zo mogelijk: $4^{2/3}$; $3^{-1/7}$; $16^{3/4}$.

OPGAVE 2

Schrijf als macht van 2.

a $\frac{\sqrt{2^3}}{4\sqrt[3]{2}}$

b $\frac{2^3 \cdot (\frac{1}{2})^4}{(\frac{2^2}{4^4})^{-2}}$

De nu volgende regels voor het rekenen met wortels zijn een speciaal geval van de regels voor machten:

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{voor alle } a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = a \quad \text{voor alle } a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = -a \quad \text{voor alle } a \leq 0$$

Machtsfunctie
Exponentiële
functie

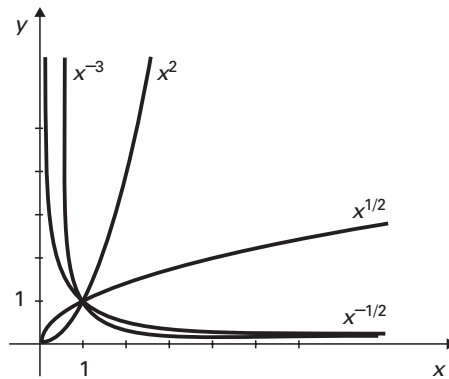
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{voor alle } a \geq 0 \text{ en alle } b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{voor alle } a \geq 0 \text{ en alle } b > 0$$

We gebruiken nu de gegeven definities om twee typen functies te definiëren: de machtsfuncties en de exponentiële functies. In de macht x^y kan x variabel en y vast genomen worden, we krijgen dan de zogeheten *machtsfuncties*, dat zijn dus functies van het type $x \rightarrow x^a$. Nemen we x vast (positief) en y variabel, dan krijgen we de zogeheten *exponentiële functies*, dat zijn functies van het type $x \rightarrow a^x$. Op deze exponentiële functies komen we in paragraaf 2 terug.

VOORBEELDEN

Voorbeelden van machtsfuncties zijn: $x \rightarrow x^0$, $x \rightarrow x$, $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow x^{-3}$, $x \rightarrow x^{1/2}$, $x \rightarrow x^{-1/2}$ en $x \rightarrow x^{\sqrt{2}} \approx x^{1,4}$ (want $\sqrt{2} \approx 1,4$). In figuur 1 staat van een aantal van de genoemde functies de grafiek.



FIGUUR 1 De grafieken van de functies $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow x^{-3}$, $x \rightarrow x^{1/2}$, $x \rightarrow x^{-1/2}$ «

Domein van een
machtsfunctie

In het algemeen geldt voor het *domein van een machtsfunctie* het volgende:

- is de exponent een natuurlijk getal, dan is het domein \mathbb{R}
- is de exponent een negatief geheel getal, dan is het domein $\mathbb{R} - \{0\}$
- is de exponent een niet-geheel positief reëel getal, dan is het domein $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- is de exponent een niet-geheel negatief reëel getal, dan is het domein $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

OPGAVE 3

Schets de grafieken van $x \rightarrow x^0$, $x \rightarrow x$, $x \rightarrow x^3$ en $x \rightarrow x^{-\sqrt{2}}$.

Welke van deze functies zijn inverteerbaar?

OPGAVE 4

Gegeven voor elke gehele $n < 0$ de functie $x \rightarrow x^n$.

- a Geef het domein en bereik van deze functie. Maak onderscheid tussen even en oneven waarden van n .
- b Welke asymptoten heeft de grafiek?
- c Geef aan op welk interval de functie monotoon is.

Machtsfuncties met een positieve exponent zijn monotoon stijgend op het interval $[0, \infty)$ en dus op dit domein inverteerbaar. Is de exponent negatief, dan zijn zij monotoon dalend op het interval $\langle 0, \infty)$ en dus op dit domein inverteerbaar. Is de exponent 0, dan is er sprake van de constante functie $x \rightarrow 1$, en die is *niet* inverteerbaar. We kunnen van regel 3 gebruikmaken om van een inverteerbare machtsfunctie de inverse te bepalen. Er geldt het volgende.

Inverse van een inverteerbare machtsfunctie

De functie $x \rightarrow x^a$ met $a > 0$ is inverteerbaar op $[0, \infty)$.

De inverse is $x \rightarrow x^{1/a}$.

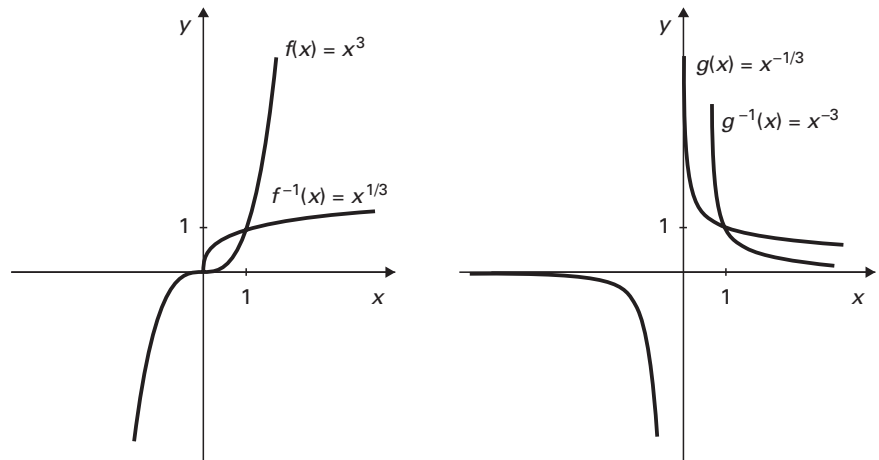
De functie $x \rightarrow x^a$ met $a < 0$ is inverteerbaar op $\langle 0, \infty)$.

De inverse is $x \rightarrow x^{1/a}$.

Het bewijs komt neer op het toepassen van regel 3: $(x^a)^{1/a} = x$, voor alle x in het domein van $x \rightarrow x^{1/a}$.

Merk op dat voor het geval a een positief natuurlijk getal is, hier niets anders staat dan dat verheffen tot de a -de macht en trekken van de a -de wortel inverse bewerkingen zijn.

In figuur 2 staan de grafieken van twee machtsfuncties en hun inversen.



FIGUUR 2 De grafieken van $x \rightarrow x^3$, $x \rightarrow x^{-1/3}$ en hun inversen

OPGAVE 5

Waarom is $x \rightarrow x^{-2}$ niet inverteerbaar op $\mathbb{R} - \{0\}$? Wat is de inverse van $x \rightarrow x^{-2}$ op $\langle 0, \infty)$? Teken de grafiek van de functie $x \rightarrow x^{-2}$.

OPGAVE 6

Gegeven de functie $f: x \rightarrow x^{3/2}$.

a Geef het functievoorschrift van f^{-1} .

b Los op: $f(x) = f^{-1}(x)$.

We bekijken de functie $g: x \rightarrow x^{-1/3}$.

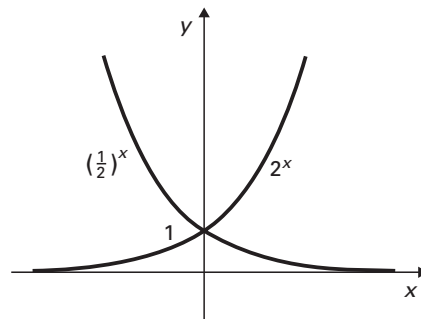
c Teken de grafiek van g .

d Is g inverteerbaar? Zo ja, geef dan het functievoorschrift van g^{-1} .

2 Exponentiële functies

Hiervoor hebben we al de definitie van een exponentiële functie gegeven. Voorbeelden van exponentiële functies zijn: $x \rightarrow 1^x$, $x \rightarrow 2^x$, $x \rightarrow (1/2)^x$.

In figuur 3 staan van de laatste twee functies de grafieken.



FIGUUR 3 De grafieken van de functies $x \rightarrow 2^x$ en $x \rightarrow (1/2)^x$ «

Het algemene voorschrift van een exponentiële functie is van de vorm

$$x \rightarrow a^x \quad \text{met } a > 0, a \neq 1$$

Grondtal

De constante a is een parameter en heet het *grondtal*.

Domein van een exponentiële functie

De drie voorbeeldfuncties hebben als domein \mathbb{R} en dat geldt ook in het algemeen: alle *exponentiële functies* hebben als *domein* \mathbb{R} . Omdat de exponenten de gehele \mathbb{R} doorlopen, nemen we als *grondtal* uitsluitend positieve reële getallen.

Bijzonderheden

Voor $a > 1$ is de exponentiële functie monotoon stijgend op \mathbb{R} ; voor $0 < a < 1$ monotoon dalend op \mathbb{R} . De grafiek heeft een horizontale asymptoot voor $y = 0$. Het snijpunt met de y -as ligt bij 1.

OPGAVE 7

Schets de grafieken van de exponentiële functies $x \rightarrow 1^x$, $x \rightarrow 3^x$, $x \rightarrow (1/3)^x$. Welke van deze functies zijn inverteerbaar?

OPGAVE 8

De grafieken van de functies $f(x) = 3 \cdot 3^{2x}$ en $g(x) = (\sqrt{3})^x$ hebben precies een snijpunt. Bereken de coördinaten van dit snijpunt.

OPGAVE 9

De grafiek van de functie $f(x) = 3 \cdot 3^x$ is te verkrijgen uit de grafiek van $g(x) = 3^x$ door alle y -waarden met 3 te vermenigvuldigen. De grafiek van f kan ook verkregen worden uit die van g door een verschuiving. Welke verschuiving is dit?

3 Logaritmen en logaritmische functies

VOORBEELD

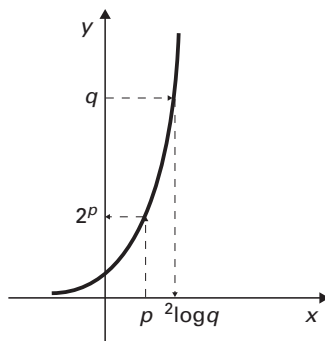
Voordat we de definitie van de logaritme van een positief getal bij een gegeven grondtal herhalen, beginnen we met een voorbeeld.

Voor de functie $f: t \rightarrow 2^t$ geldt dat 4096 een functiewaarde is. De vraag is nu: van welk origineel? Omdat 4096 een macht van 2 is, $2^{12} = 4096$, is het gevraagde origineel 12.

We zeggen: 12 is de logaritme van 4096 voor het grondtal 2 en noteren dit als ${}^2\log 4096 = 12$. In woorden kunnen we dit ook nog als volgt zeggen: ‘de logaritme van 4096 voor het grondtal 2 is de exponent van de macht van 2 die 4096 is.’

Stel nu dat we het origineel van 10000 willen bepalen. Noemen we dat origineel t , dan moeten we dus $t \in \mathbb{R}$ zo bepalen dat $2^t = 10000$. Omdat $2^{13} < 10000$, $2^{14} > 10000$ en $t \rightarrow 2^t$ een monotoon stijgende functie is, volgt dat t een waarde tussen 13 en 14 heeft.

Analoog definiëren we nu de logaritme van 10000 voor het grondtal 2 als het getal t waarvoor geldt dat $2^t = 10000$. We noteren dit als $t = {}^2\log 10000$. Het reële getal ${}^2\log 10000$ ligt dus tussen 13 en 14. We definiëren ${}^2\log 10000$ dus als de oplossing van de vergelijking $2^t = 10000$. Dat er precies één oplossing is, volgt uit het feit dat de functie $f: t \rightarrow 2^t$ monotoon stijgend op \mathbb{R} is, dus inverteerbaar, en dat 10000 in het bereik $[0, \infty)$ van f ligt. In figuur 4 is dit in beeld gebracht.



FIGUUR 4 De logaritme als oplossing van een exponentiële vergelijking

Definitie van logaritme

De definitie van de logaritme van x voor het grondtal a luidt nu algemeen: het is de exponent van die macht met grondtal a die precies x oplevert. Anders gezegd: als $x = a^t$, dan $t = {}^a\log x$.

Bij deze definitie is de beperking tot positieve grondtallen niet genoeg, we moeten ook het grondtal 1 uitsluiten, immers de functie $x \rightarrow 1^x$ is niet inverteerbaar. Bovendien bestaan alleen van positieve reële getallen de logaritmen, want machten met een positief grondtal zijn positief.

Rekenregels van de logaritme

Uit de hier gegeven definitie volgen een aantal rekenregels (de beperking dat de grondtallen groter dan 0 en ongelijk aan 1 zijn, schrijven we er niet steeds bij, evenmin als de voorwaarde dat alleen de logaritmen van positieve getallen bestaan).

Regel 1

$${}^a\log 1 = 0, \text{ want } a^0 = 1.$$

Regel 2

$${}^a\log a = 1, \text{ want } a^1 = a.$$

Regel 3

$$a^{a\log x} = x, \text{ want vul in de hiervoor gegeven definitie van een logaritme in } x = a^t \text{ voor } t \text{ de uitdrukking } {}^a\log x \text{ in.}$$

Regel 4

$${}^a\log pq = {}^a\log p + {}^a\log q$$

Het bewijs van deze regel is wat bewerkelijker. We stellen ${}^a\log p = x$ en ${}^a\log q = y$, dus $a^x = p$ en $a^y = q$. Dan volgt: $pq = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Volgens de definitie van de logaritme volgt uit $pq = a^{x+y}$ dat $x + y = {}^a\log pq$, dus ${}^a\log p + {}^a\log q = {}^a\log pq$.

Regel 5 ${}^a\log(p/q) = {}^a\log p - {}^a\log q$

Regel 6 ${}^a\log p^q = q \cdot {}^a\log p$

Het bewijs van regels 5 en 6 moet u in opgave 12 zelf leveren.

Regel 7
Verandering van
grondtal ${}^a\log p = \frac{{}^s\log p}{{}^s\log a}$

Voor het bewijs herschrijven we deze regel tot:

$${}^a\log p \cdot {}^s\log a = {}^s\log p$$

Op het linkerlid hiervan passen we nu regel 6 toe:

$${}^a\log p \cdot {}^s\log a = {}^s\log(a^{{}^a\log p})$$

Volgens regel 3 is de laatste uitdrukking inderdaad gelijk aan ${}^s\log p$.

OPGAVE 10

Bereken de volgende logaritmen: ${}^2\log 16$; ${}^{27}\log 3$; ${}^4\log(1/2)$; ${}^{1/3}\log(1/9)$.

OPGAVE 11

Moderne luchtschepen verliezen 2 % van hun gasinhoud per dag via hun wand. Als zo'n luchtschip helemaal gevuld is, bevat het 38000 liter gas. We nemen aan dat op $t = 0$ het luchtschip gevuld is en dat het gasverlies een continu proces is. Met $I(t)$ geven we de hoeveelheid gas op tijdstip t aan, met t in uren. Bij benadering geldt het volgende wiskundige model: $I(t) = 38000 \cdot 0,9992^t$ voor $t \geq 0$.

Zo'n luchtschip kan niet meer vliegen als er minder dan 80 % is van de hoeveelheid gas op tijdstip $t = 0$. Bereken het tijdstip waarop dat het geval is.

OPGAVE 12

Bewijs de regels 5 en 6.

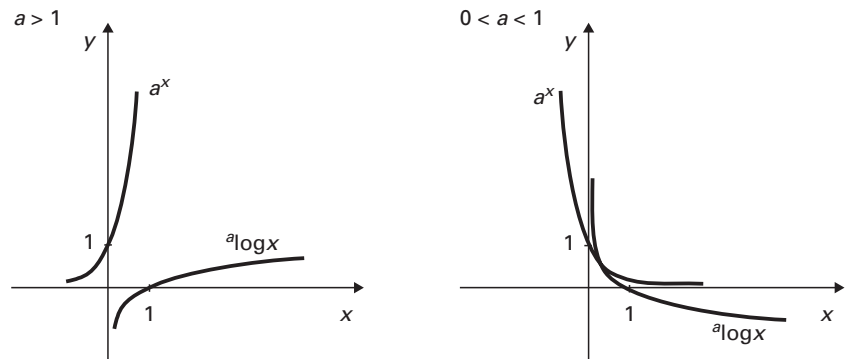
OPGAVE 13

Los op: ${}^2\log(x^2 - 1) = 1/4$.

OPGAVE 14

Laat zien dat voor elke p , elke $a > 0$, $a \neq 1$, elke $b > 0$ geldt: ${}^{ap}\log b^p = {}^a\log b$.

Voor elk grondtal $a > 0$, $a \neq 1$, is de exponentiële functie $x \rightarrow a^x$ met $x \in \mathbb{R}$ inverteerbaar, immers voor $0 < a < 1$ is de bijbehorende exponentiële functie monotoon dalend, voor $a > 1$ is de bijbehorende exponentiële functie monotoon stijgend. Uit regel 3 volgt dat de functie $x \rightarrow {}^a\log x$ ($x > 0$) de inverse is van de functie $x \rightarrow a^x$ met $x \in \mathbb{R}$, er geldt immers dat $a^{{}^a\log x} = x$, voor alle $x > 0$. In figuur 5 staan de grafieken van twee exponentiële functies, een met grondtal $a > 1$ en een met grondtal $0 < a < 1$, en de bijbehorende logaritmische functies die hun inverse zijn. Voor $a > 1$ is de logaritmische functie monotoon stijgend op $\langle 0, \infty \rangle$ en voor $0 < a < 1$ is de logaritmische functie monotoon dalend op $\langle 0, \infty \rangle$. De grafiek heeft een verticale asymptoot voor $x = 0$. Het snijpunt met de x -as ligt bij 1.



FIGUUR 5 De grafieken van twee exponentiële functies en hun inversen

OPGAVE 15

- Geef de inverse van de functie $x \rightarrow (\sqrt{2})^x$ met $x \in \mathbb{R}$.
- Geef ook het domein van de inverse.
- De gegeven functie is te herschrijven tot $x \rightarrow 2^{px}$. Bepaal p .
- Elke exponentiële functie $x \rightarrow a^x$ is te herschrijven tot $x \rightarrow 2^{px}$. Druk p in a uit.

TERUGKOPPELING

Uitwerking van de opgaven

$$1 \quad 4^{2/3} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

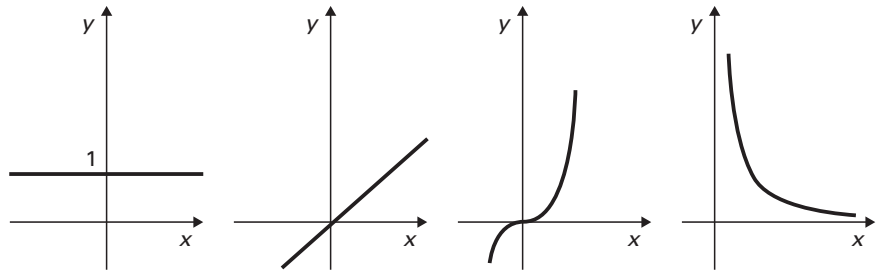
$$3^{-1/7} = \sqrt[7]{3^{-1}} = \sqrt[7]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[7]{3}}$$

$$16^{3/4} = (16^{1/4})^3 = 2^3 = 8$$

$$2 \quad \frac{\sqrt{2^3}}{4\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2 \cdot 3}{3}}} = 2^{-1\frac{1}{6}}$$

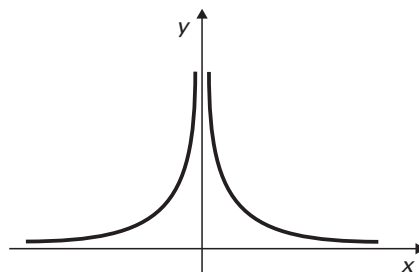
$$\frac{2^3 \cdot (\frac{1}{2})^4}{(2^2/4^4)^{-2}} = \frac{2^3 \cdot 2^{-4}}{(2^2/2^8)^{-2}} = \frac{2^{-1}}{(2^{-6})^{-2}} = \frac{2^{-1}}{2^{12}} = 2^{-13}$$

- 3 Zie figuur 6. Alleen de functie $x \rightarrow 1$ is niet inverteerbaar.



FIGUUR 6 Functies $x \rightarrow x^0$, $x \rightarrow x$, $x \rightarrow x^3$ en $x \rightarrow x^{-1/2}$

- 4 **a** $D = \mathbb{R} - \{0\}$, $B(n \text{ is even}) = \langle 0, \infty \rangle$, $B(n \text{ is oneven}) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- b** Asymptoten $x = 0$, $y = 0$.
- c** Voor n is even: op $\langle -\infty, 0 \rangle$ stijgend, op $\langle 0, \infty \rangle$ dalend.
Voor n is oneven: op $\langle -\infty, 0 \rangle$ dalend, op $\langle 0, \infty \rangle$ dalend.
- 5 Er geldt $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$ en $(-3)^{-2} = 1/(-3)^2 = 1/9$, dus twee verschillende originelen met hetzelfde beeld.
De inverse functie op $\langle 0, \infty \rangle$ is $x \rightarrow x^{-1/2}$.

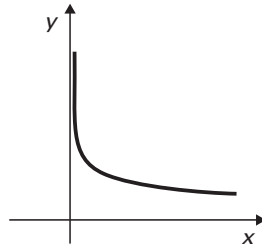


FIGUUR 7 De functie $x \rightarrow x^{-2}$

6 a $f^{-1}: x \rightarrow x^{2/3}$

b De volgende vergelijking moet opgelost worden: $x^{3/2} = x^{2/3}$. We verheffen links en rechts tot de zesde macht: $(x^{3/2})^6 = (x^{2/3})^6$. Dus $x^9 = x^4$. Op 0 herleiden: $x^9 - x^4 = 0$. We brengen x^4 buiten haakjes: $x^4(x^5 - 1) = 0$. Dus $x = 0$ of $x = 1$.

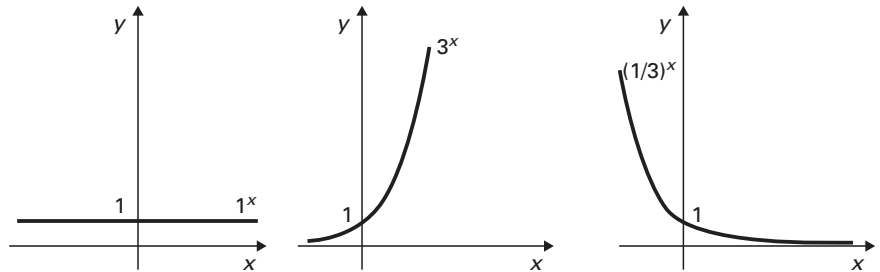
c Zie figuur 8.



FIGUUR 8 De functie $g: x \rightarrow x^{-1/3}$

d Op $\langle 0, \infty \rangle$ is g inverteerbaar, met inverse $x \rightarrow x^{-3}$.

7 Alleen de eerste functie is niet inverteerbaar.



FIGUUR 9 Functies $x \rightarrow 1^x$, $x \rightarrow 3^x$ en $x \rightarrow (1/3)^x$

8 $3 \cdot 3^{2x} = (\sqrt{3})^x$
 $\Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^{x/2}$
 $\Leftrightarrow 2x + 1 = x/2$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

Het snijpunt heeft dus coördinaten $(-\frac{2}{3}, f(-\frac{2}{3}))$ (of als tweede $g(-\frac{2}{3})$), dus $(-\frac{2}{3}, 3^{-1/3}) = (-\frac{2}{3}, 1/\sqrt[3]{3})$.

9 $f(x) = 3^{x+1}$, dus $f(x) = g(x + 1)$. De grafiek van f is dus te verkrijgen uit die van g door deze over een afstand 1 naar links te verschuiven.

10 ${}^2\log 16 = 4$ want $2^4 = 16$
 ${}^{27}\log 3 = 1/3$ want $27^{1/3} = 3$
 ${}^4\log(1/2) = -1/2$ want $4^{-1/2} = 1/2$
 ${}^{1/3}\log(1/9) = 2$ want $(1/3)^2 = 1/9$

11 $38000 \cdot 0,9992^t = 0,8 \cdot 38000$ geeft $0,9992^t = 0,8$. Omdat de factor 38000 uitdeelt, hangt t niet af van de hoeveelheid gas op $t = 0$. Uitrekenen geeft $t = {}^{0,9992}\log 0,8 = \log 0,8 / \log 0,9992 \approx 278,8$ uur.

- 12 Uit $p = \frac{p}{q} \cdot q$ volgt met regel 4:

$${}^a\log p = {}^a\log \frac{p}{q} + {}^a\log q$$

En hieruit volgt regel 5.

Voor regel 6 gaan we uit van de definitie. We beginnen met het rechterdeel van regel 6. We kunnen deze logaritme alleen uitrekenen als we weten hoe we p als macht van a moeten schrijven. Stel $p = a^x$, dus ${}^a\log p = x$. Nu kunnen we ook het linkerlid uitrekenen. Er geldt $p^q = (a^x)^q = a^{qx}$, dus ${}^a\log p^q = {}^a\log a^{qx} = qx$ ofwel ${}^a\log p^q = q \cdot {}^a\log p$.

- 13 ${}^2\log(x^2 - 1) = 1/4$, dus $x^2 - 1 = 2^{1/4} = \sqrt[4]{2}$ ofwel $x^2 = \sqrt[4]{2} + 1$, dus

$$x = \pm \sqrt{\sqrt[4]{2} + 1} \approx \pm 1,48$$

- 14 ${}^a\log b = x \Leftrightarrow b = a^x \Leftrightarrow b^p = (a^x)^p = (a^p)^x \Leftrightarrow x = {}^{ap}\log b^p$

- 15 **a** $x \rightarrow \sqrt[2]{\log x}$

b $\langle 0, \infty \rangle$

c Er geldt: $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, dus $(\sqrt{2})^x = (2^{1/2})^x = 2^{x/2}$. Dus $p = 1/2$.

d Als voor alle $x \in \mathbb{R}$ moet gelden $a^x = 2^{px}$, dan moet gelden $a = 2^p$, dus $p = {}^2\log a$.